

# 一个非线性带分布时滞尺度结构的种群模型正稳态解的存在性\*

柏萌<sup>1</sup>, 冯兆永<sup>2</sup>, 周庆华<sup>1</sup>

(1. 广东省肇庆学院数学与统计学院, 广东 肇庆 526061;

2. 中山大学数学学院, 广东 广州 510275)

**摘要:** 研究一个非线性的带分布时滞尺度结构的种群模型。此模型既考虑新生个体的产生过程中需要的不可少的时间间隔, 又考虑种群内部竞争的影响。利用算子半群的方法得到此模型正稳态解存在的充分条件。

**关键词:** 尺度结构种群模型; 分布时滞; 稳态解; 算子半群

**中图分类号:** O175.22; O175.29; O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2018) 01-0044-05

## Steady states of a nonlinear size-structured population model with distributed delay in birth process

BAI Meng<sup>1</sup>, FENG Zhaoyong<sup>2</sup>, ZHOU Qinghua<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, China;

2. School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A nonlinear size-structured population model with distributed delay in birth process is studied. The time lag in birth process and the internal competition are considered in the model. Sufficient conditions for the existence of steady states are obtained by using the method of semigroups.

**Key words:** size-structured populations; distributed delay; steady states; semigroups

本文研究如下带分布时滞的具有尺度结构的非线性的种群模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(\gamma(x, N_1(t), N_2(t))n)}{\partial x} = \\ -\mu(x, N_1(t), N_2(t))n + \\ \int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta(\sigma, x, y, N_1(t), N_2(t)) \cdot \\ n(t + \sigma, y) d\sigma dy, x \in [0, m], t \geq 0, \\ \gamma(0, N_1(t), N_2(t))n(t, 0) = 0, t \geq 0, \\ n(\sigma, x) = \hat{n}(\sigma, x), \sigma \in [-\tau, 0], x \in [0, m] \end{cases} \quad (1)$$

上述模型中未知函数  $n(t, x)$  表示的是尺度  $x \in [0,$

$m]$  的个体在  $t \in [0, +\infty)$  时刻的种群密度, 其中  $m > 0$  表示的是个体的最大尺度。  $N_1(t) = \int_0^l n(t, x) dx$  和  $N_2(t) = \int_l^m n(t, x) dx$  分别为较小尺度种群和较大尺度种群在  $t \in [0, +\infty)$  时刻的总密度, 这里  $l \in (0, m)$  为固定常数。  $\gamma(x, N_1, N_2)$  和  $\mu(x, N_1, N_2)$  为个体的生长率和死亡率, 此处, 生长率和死亡率不但与个体的尺度有关, 还与较小尺度种群和较大尺度种群的总密度有关。假设在种群的繁衍过程中有一个时间间隔  $-\sigma$  ( $\sigma \in [-\tau, 0]$ ), 这里

\* 收稿日期: 2017-08-23

**基金项目:** 国家自然科学基金 (11501499, 11471339); 广东省高等学校优秀青年教师培养计划 (YQ2015167); 广东省普通高校特色创新项目 (几类细胞分裂生长模型和传染病模型的定性分析); 广东省自然科学基金 (2015A030313707); 广东省肇庆学院自然科学基金 (201429)

**作者简介:** 柏萌 (1982 年生), 女; **研究方向:** 偏微分方程; E-mail: baimengclare@qq.com

**通信作者:** 冯兆永 (1977 年生), 男; **研究方向:** 偏微分方程; E-mail: fzhaoy@mail.sysu.edu.cn

$\tau > 0$  为最大的时间间隔),  $\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2)$  为尺度为  $y$  的个体经过时间  $-\sigma$  的孕育产生尺度为  $x$  的新生个体的繁衍概率, 此繁衍概率也与较小尺度种群和较大尺度种群的总密度有关。

另外,  $\hat{n}(\sigma, x)$  是给定的定义在  $[-\tau, 0] \times [0, m]$  上的函数。本文记

$$\hat{n}_0(x) = \hat{n}(0, x) \text{ 对于 } 0 \leq x \leq m \quad (2)$$

问题 (1) 是一个带分布时滞的具有尺度结构的非线性的种群模型。在问题 (1) 中, 既考虑新生个体的产生过程中需要的不可少的时间间隔, 又考虑种群内部竞争的影响。确切的说, 问题 (1) 的分布时滞表示的是怀孕到生产或者产卵到孵化的时间间隔, 这个时间间隔可以从 0 变到  $\tau$  (参见文 [1-5]), 而且生长率  $\gamma$ 、死亡率  $\mu$  和繁衍概率  $\beta$  都与较小尺度种群和较大尺度种群的总密度相关。类似问题 (1) 的线性的带分布时滞的具有尺度结构的种群模型的全局解的适定性和解的渐近性态已在文 [2] 得出。问题 (1) 正的全局解的存在性已在文 [4] 得出。本文将研究问题 (1) 正稳态解的存在性。对于非线性的种群发展方程, 正稳态解 (即与时间无关的解) 的存在性是很重要的问题, 近年来不少学者用不同的方法研究了一系列非线性的不带时滞的种群发展方程的正稳态解的存在性<sup>[6-9]</sup>。文 [6] 用计算的方法研究了一个非时滞的带尺度结构的种群模型的正稳态解的存在性。文 [7-9] 用算子半群的方法研究了一些非时滞的带年龄结构或者尺度结构的种群模型的正稳态解的存在性。本文主要利用文 [7] 和文 [9] 的算子半群方法, 研究问题 (1) 的正稳态解的存在性, 由于此问题是带分布时滞的, 需要一些改进, 主要的改进在将问题 (1) 这个带分布时滞的种群模型正稳态解的存在性问题转化为巴拿赫空间上的柯西问题正稳态解的存在性问题。

本文对生长率  $\gamma$ 、死亡率  $\mu$  和繁衍概率  $\beta$  的假设如下:

(H1)  $\mu \in C([0, m] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty))$ ,  $\mu \geq 0$ , 而且由于环境资源和生存空间有限, 假设当较大尺度种群的总密度  $N_1$  或者较小尺度种群的总密度  $N_2$  趋于无穷大时, 死亡率  $\mu$  也趋于无穷大, 即  $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \mu(\cdot, N_1, \cdot) = +\infty$ , 而且  $\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \mu(\cdot, \cdot, N_2) = +\infty$ ;

(H2)  $\gamma \in C([0, m] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty))$ , 存在常数  $\gamma_0 > 0$ , 使得对于所有的  $x \in [0, m]$ ,  $N_1 \in [0, +\infty)$  和  $N_2 \in [0, +\infty)$ , 都有  $\gamma(x, N_1, N_2) \geq \gamma_0$ 。  $\gamma$  对于  $x$  存在一阶偏导数  $\gamma_x \in C([0,$

$m] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty))$ , 并且存在常数  $\gamma_1 > 0$ , 使得对于所有的  $x \in [0, m]$ ,  $N_1 \in [0, +\infty)$  和  $N_2 \in [0, +\infty)$ , 都有  $|\gamma_x(x, N_1, N_2)| \leq \gamma_1$ 。

(H3)  $\beta \in C([-\tau, 0] \times [0, m] \times [0, m] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty))$ ,  $\beta \geq 0$ , 并且当  $y > x$  时,  $\beta(\cdot, x, y, \cdot, \cdot) > 0$ 。

## 1 问题转化

本节将问题 (1) 正稳态解的存在性问题转化为巴拿赫空间上的柯西问题正稳态解的存在性问题。可在文 [1-3] 中找到相似的转化方法。

引入如下巴拿赫空间:

$$\begin{aligned} X &:= L^1[0, m], \text{ 其模为 } \|u\|_X = \int_0^m |u(x)| dx; \\ X_1 &:= L^1[0, l], \text{ 其模为 } \|u\|_{X_1} = \int_0^l |u(x)| dx; \\ X_2 &:= L^1[l, m], \text{ 其模为 } \|u\|_{X_2} = \int_l^m |u(x)| dx; \\ Y &:= \{u \in W^{1,1}(0, m) : u(0) = 0\}, \text{ 其模为} \\ \|u\|_Y &= \int_0^m |u(x)| dx + \int_0^m |u'(x)| dx; \\ E &:= L^1([-\tau, 0], X) \end{aligned}$$

其模为

$$\|\tilde{u}\|_E = \int_0^m \int_{-\tau}^0 |\tilde{u}(\sigma, x)| d\sigma dx$$

对于给定的  $v \in X$ , 令  $V_1 = \int_0^l v(x) dx$  和  $V_2 = \int_l^m v(x) dx$ , 定义算子  $A_{(V_1, V_2)} : Y \rightarrow X$ ,  $B_{(V_1, V_2)} : X \rightarrow X$  和  $\Phi_{(V_1, V_2)} : E \rightarrow X$ :

$$A_{(V_1, V_2)} u := (-\gamma(\cdot, V_1, V_2)u)' \text{ 对于 } u \in Y;$$

$$B_{(V_1, V_2)} u := -\mu(\cdot, V_1, V_2)u \text{ 对于 } u \in X;$$

$$\Phi_{(V_1, V_2)} \tilde{u} = \int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta(\sigma, \cdot, y, V_1, V_2) \tilde{u}(t + \sigma, y) d\sigma dy \text{ 对于 } \tilde{u} \in E$$

对于给定的  $v \in X$ , 有  $A_{(V_1, V_2)} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ,  $B_{(V_1, V_2)} \in \mathcal{L}(X)$  和  $\Phi_{(V_1, V_2)} \in \mathcal{L}(E, X)$ 。利用以上记号, 将问题 (1) 重新写为巴拿赫空间  $X$  上的延迟微分方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{dn(t)}{dt} = (A_{(N_1, N_2)} + B_{(N_1, N_2)})n(t) + \\ \quad \Phi_{(N_1, N_2)} n_t, \quad t \geq 0, \\ n(0) = \hat{n}_0, \\ n_0 = \hat{n}, \end{cases} \quad (3)$$

此处  $n : [0, +\infty) \rightarrow X$  定义为  $n(t) := n(t, \cdot)$ ;  $n_t : [-\tau, 0] \rightarrow X$  定义为  $n_t(\sigma) := n(t + \sigma)$ ,  $\sigma \in [-\tau, 0]$ , 而且

$$N_1(t) = \int_0^l n(t,x) dx, N_2(t) = \int_l^m n(t,x) dx$$

接下来, 引入巴拿赫空间  $E$  上如下算子:

$$(G\tilde{u})(\sigma) := \frac{d}{d\sigma}\tilde{u}, \text{ 定义域}$$

$$D(G) = W^{1,1}([- \tau, 0], X),$$

$$Q\tilde{u} := \tilde{u}(0) \text{ 对于 } \tilde{u} \in D(G)$$

注意到  $G \in \mathcal{L}(D(G), E)$  且  $Q \in \mathcal{L}(D(G), X)$ 。令

$$\mathbf{X} := \{(\tilde{u}, u)^T \mid \tilde{u} \in E, u \in X\}$$

其模为  $\|(\tilde{u}, u)^T\|_X = \|\tilde{u}\|_E + \|u\|_X$ ;

$$\mathbf{Y} := \{(\tilde{u}, u)^T \mid (\tilde{u}, u) \in$$

$$W^{1,1}([- \tau, 0], X) \times W^{1,1}(0, m),$$

$$Q\tilde{u} = u, u(0) = 0\}$$

其模为  $\|(\tilde{u}, u)^T\|_Y = \|\tilde{u}\|_E + \|\partial_\sigma \tilde{u}\|_E + \|u\|_Y$

定义算子  $\mathbf{A}_{(v_1, v_2)}: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ :

$$\mathbf{A}_{(v_1, v_2)} U := \begin{pmatrix} G & 0 \\ \Phi_{(v_1, v_2)} & A_{(v_1, v_2)} + B_{(v_1, v_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ u \end{pmatrix}$$

对于

$$U = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ u \end{pmatrix} \in \mathbf{Y}$$

对于给定的  $\mathbf{V} = (\tilde{v}, v)^T \in \mathbf{X}$ , 有  $\mathbf{A}_{(v_1, v_2)} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ 。

利用以上记号, 将问题 (3) 重新写为巴拿赫空间  $\mathbf{X}$  的柯西问题:

$$\begin{cases} \mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}_{(u_1, u_2)} \mathbf{U}(t), t > 0, \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \end{cases} \quad (4)$$

此处  $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} n_t \\ n(t) \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{n}_0 \end{pmatrix}$

其中  $\hat{n}_0$  由式 (2) 给出, 而且

$$U_1(t) = \int_0^l n(t,x) dx, U_2(t) = \int_l^m n(t,x) dx$$

于是问题 (1) 的正稳态解的存在性问题, 可以转化成如下问题解的存在性问题:

$$\begin{cases} \mathbf{U}'(t) = 0 = \mathbf{A}_{(u_1, u_2)} \mathbf{U}, \\ \mathbf{L}(\mathbf{U}) = (U_1, U_2), \\ 0 \neq \mathbf{U} \in \mathbf{X}_+, \end{cases} \quad (5)$$

此处, 算子  $\mathbf{L}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}_+^2$  的定义如下:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = (\|u\|_{X_1}, \|u\|_{X_2})$$

对于

$$\mathbf{U} = (\tilde{u}, u)^T \in \mathbf{X}$$

## 2 正稳态解的存在性

本节首先考虑  $\beta$  可以分离的特殊情况, 即  $\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_1(x)\beta_2(\sigma, y, N_1, N_2)$

或者

$$\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_3(x, N_1, N_2)\beta_4(\sigma, y)$$

或者

$$\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_5(x, N_1)\beta_6(\sigma, y, N_2)$$

或者

$$\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_7(x, N_2)\beta_8(\sigma, y, N_1)$$

利用文 [7] 中的定理 2.5 给出以上情况下问题 (5) 有解的充分条件。然后再用文 [9] 中的算子扰动的方法给出  $\beta$  为一般情况下问题 (5) 有解的充分条件。

这里以

$$\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_1(x)\beta_2(\sigma, y, N_1, N_2)$$

或者

$$\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_3(x, N_1, N_2)\beta_4(\sigma, y)$$

为例, 其余的特殊情况的分析过程和结论类似。给出以下假设 (H4) 和 (H4)':

(H4)  $\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_1(x)\beta_2(\sigma, y, N_1, N_2)$ , 而且由于环境资源和生存空间有限, 假设当较大尺度种群的总密度  $N_1$  或者较小尺度种群的总密度  $N_2$  趋于无穷大时, 繁衍概率  $\beta$  趋于 0, 即  $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \beta_2(\cdot, \cdot, N_1, \cdot) = 0$  而且  $\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \beta_2(\cdot, \cdot, \cdot, N_2) = 0$ 。

(H4)'  $\beta(\sigma, x, y, N_1, N_2) = \beta_3(x, N_1, N_2)\beta_4(\sigma, y)$ , 而且由于环境资源和生存空间有限, 假设当较大尺度种群的总密度  $N_1$  或者较小尺度种群的总密度  $N_2$  趋于无穷大时, 繁衍概率  $\beta$  趋于 0, 即  $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \beta_3(\cdot, N_1, \cdot) = 0$  而且  $\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \beta_3(\cdot, \cdot, N_2) = 0$ 。

利用文 [7] 中的定理 2.5 给出以上情况下问题 (5) 有解的充分条件。为此需证明对于任意给定的  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2$ , 线性算子  $\mathbf{A}_{(u_1, u_2)}$  生成正的, 最终紧的和不可简化的有界线性算子的半群以及其谱上界  $s(\mathbf{A}_{(u_1, u_2)})$  具有如下性质:

(P1) 当  $(U_1, U_2) = (0, 0)$  时,  $s(\mathbf{A}_{(u_1, u_2)}) > 0$ ;

(P2) 存在常数  $R > 0$ , 使得当  $\|(U_1, U_2)\| > R$  时,  $s(\mathbf{A}_{(u_1, u_2)}) < 0$ 。

引理 1 假设条件 (H1) - (H3) 成立, 对于任意给定的  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2$ , 线性算子  $\mathbf{A}_{(u_1, u_2)}$  生成正的, 最终紧的和不可简化的有界线性算子的半群。

证明 由文 [2] 中的引理 3.1, 引理 3.2 和引理 3.5 可知, 对于任意给定的  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2$ , 线性算子  $\mathbf{A}_{(u_1, u_2)}$  生成正的, 最终紧的和不可简化的强连续算子半群  $(\mathbf{T}(t))_{t \geq 0}$ 。特别地, 由文 [4]

的引理 3.2 可知, 存在常数  $M \geq 1, \alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\|\mathbf{T}(t)\| \leq Me^{\alpha t}$ . 由半群  $(\mathbf{T}(t))_{t \geq 0}$  的最终紧性 (参见文 [10]) 可知, 存在  $t_0 > 0$ , 当  $t \geq t_0$  时,  $\mathbf{T}(t)$  为紧算子, 所以当  $0 \leq t < t_0$  时,  $\|\mathbf{T}(t)\| \leq Me^{\alpha t}$ , 而当  $t \geq t_0$  时,  $T(t)$  是有界的, 于是对任意的  $t \geq 0, T(t)$  都是有界的。综上所述, 引理 1 得证。

**引理 2** 对于任意给定的  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2, \lambda \in \mathbf{C}$  是线性算子  $\mathbf{A}_{(U_1, U_2)}$  的特征值当且仅当  $\lambda$  是特征方程  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 1$  的解。此处

$$K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = \int_0^m \int_{-\tau}^0 e^{\lambda \sigma} \beta_2(\sigma, x, U_1, U_2) \cdot \int_0^x \frac{\beta_1(s) E_\lambda(x, U_1, U_2)}{E_\lambda(s, U_1, U_2) \gamma(s, U_1, U_2)} ds d\sigma dx$$

其中

$$E_\lambda(x, U_1, U_2) = \exp\left\{-\int_0^x \frac{\lambda + \mu(s, U_1, U_2) + \gamma'(s, U_1, U_2)}{\gamma(s, U_1, U_2)} ds\right\}$$

**证明** 对于任意给定的  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2$ , 考虑特征值方程

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{(U_1, U_2)}) \mathbf{U} = 0$$

令  $\mathbf{U} = (\tilde{u}(\sigma, x), u(x))^T$ , 上述方程可写为:

$$\begin{cases} \lambda \tilde{u}(\sigma, x) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \tilde{u}(\sigma, x) = 0, \\ -\tau < \sigma < 0, 0 < x < m, \\ \lambda u(x) + \frac{d}{dx}(\gamma(x, U_1, U_2)u(x)) = \\ -\mu(x, N_1(t), N_2(t))u + \\ \int_0^m \beta_1(x) \beta_2(\sigma, y, U_1, U_2) \tilde{u}(t + \sigma, y) d\sigma dy, \\ 0 < x < m, \\ \tilde{u}(0, x) = u(x), 0 < x < m, \\ \gamma(0, U_1, U_2)u(0) = 0 \end{cases}$$

上述方程的解为

$$\tilde{u}(\sigma, x) = e^{\lambda \sigma} u(x),$$

$$u(x) = E_\lambda(x, U_1, U_2) \int_0^x \frac{\beta_1(s)}{E_\lambda(s, U_1, U_2) \gamma(s, U_1, U_2)} \cdot \int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta_2(\sigma, y, U_1, U_2) e^{\lambda \sigma} u(y) d\sigma dy ds$$

上式两边分别乘上  $e^{\lambda \sigma} \beta_2(\sigma, x, U_1, U_2)$ , 然后分别对  $x$  和  $\sigma$  从 0 到  $m$  和  $-\tau$  到 0 积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^m \int_{-\tau}^0 e^{\lambda \sigma} \beta_2(\sigma, x, U_1, U_2) u(x) d\sigma dx &= \\ \int_0^m \int_{-\tau}^0 e^{\lambda \sigma} \beta_2(\sigma, x, U_1, U_2) u(x) d\sigma dy \cdot \\ \int_0^m \int_{-\tau}^0 e^{\lambda \sigma} \beta_2(\sigma, x, U_1, U_2) \cdot \end{aligned}$$

$$\int_0^x \frac{E_\lambda(x, U_1, U_2) \beta_1(s)}{E_\lambda(x, U_1, U_2) \gamma(s, U_1, U_2)} ds d\sigma dx$$

于是可知,  $\lambda \in \mathbf{C}$  是线性算子  $\mathbf{A}_{(U_1, U_2)}$  的特征值当且仅当  $\lambda$  是特征方程  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 1$  的解。

**引理 3** 假设条件 (H1) - (H3) 成立, 对于任意给定的  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2$ , 谱上界  $s(\mathbf{A}_{(U_1, U_2)})$  为使得  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 1$  的唯一的实数  $\lambda_0$ 。

**证明** 对于任意给定的  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2$ , 函数  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda)$  关于  $\lambda$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是连续的和严格单调递减的, 并且  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 0$  以及  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = +\infty$ 。于是, 方程  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 1$  有唯一实数解  $\lambda_0$ 。由  $s(\mathbf{A}_{(U_1, U_2)})$  的定义可知,  $\lambda_0 = s(\mathbf{A}_{(U_1, U_2)})$ 。

**定理 1** 假设条件 (H1) - (H4) 成立, 并且

$$\begin{aligned} \int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta_2(\sigma, x, 0, 0) \int_0^x \frac{\beta_1(s)}{\gamma(s, 0, 0)} \cdot \\ \exp\left\{-\int_s^x \frac{\mu(r, 0, 0) + \gamma'(r, 0, 0)}{\gamma(r, 0, 0)} dr\right\} ds d\sigma dx > 1 \end{aligned}$$

则问题 (5) 有解。

**证明** 当  $(U_1, U_2) = (0, 0)$  时,  $K_{(U_1, U_2)}(0) > 1$ 。于是由函数  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda)$  关于  $\lambda$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的连续性和严格单调递减性以及  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 0$  可得,  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 1$  有唯一实数解  $\lambda_0 = s(\mathbf{A}_{(U_1, U_2)}) > 0$ 。又由条件 (H1) - (H4) 可得,  $\lim_{\|(U_1, U_2)\| \rightarrow \infty} K_{(U_1, U_2)}(0) = 0$ , 于是存在常数  $R > 0$ , 使得当  $\|(U_1, U_2)\| > R$  时,  $K_{(U_1, U_2)}(0) < 1$ ,  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda)$  关于  $\lambda$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的连续性和严格单调递减性以及  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = +\infty$  可得,  $K_{(U_1, U_2)}(\lambda) = 1$  有唯一实数解  $\lambda_0 = s(\mathbf{A}_{(U_1, U_2)}) < 0$ 。综上所述, 满足性质 (P1) - (P2), 根据引理 1 和 [7] 中的定理 2.5, 则问题 (5) 有解。

**定理 2** 假设条件 (H1) - (H3) 以及 (H4)' 成立, 并且

$$\begin{aligned} \int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta_4(\sigma, x) \int_0^x \frac{\beta_3(s, 0, 0)}{\gamma(s, 0, 0)} \cdot \\ \exp\left\{-\int_s^x \frac{\mu(r, 0, 0) + \gamma'(r, 0, 0)}{\gamma(r, 0, 0)} dr\right\} ds d\sigma dx > 1 \end{aligned}$$

则问题 (5) 有解。

**证明** 同定理 1 (略)。

接下来给出  $\beta$  为一般情况下问题 (5) 有解的充分条件。

**定理 3** 假设条件 (H1) - (H3) 以及以下的两个假设条件成立:

(H5) 存在  $(U_1^-, U_2^-) \in \mathbf{R}_+^2$ , 使得

$$\beta_1(x)\beta_2(\sigma, y, U_1^-, U_2^-) \leq$$

$$\beta(\sigma, x, y, U_1^-, U_2^-), \sigma \in [-\tau, 0], x, y \in [0, m]$$

而且

$$\int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta_2(\sigma, x, U_1^-, U_2^-) \int_0^x \frac{\beta_1(s)}{\gamma(s, U_1^-, U_2^-)} \cdot$$

$$\exp\left\{-\int_s^x \frac{\mu(r, U_1^-, U_2^-) + \gamma'(r, U_1^-, U_2^-)}{\gamma(r, U_1^-, U_2^-)} dr\right\} ds d\sigma dx > 1$$

(H6) 存在

$$(U_1^+, U_2^+) \in \mathbf{R}_+^2$$

使得

$$\beta_1(x)\beta_2(\sigma, y, U_1^+, U_2^+) \geq \beta(\sigma, x, y, U_1^+, U_2^+),$$

$$\sigma \in [-\tau, 0], x, y \in [0, m]$$

而且

$$\int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta_2(\sigma, x, U_1^+, U_2^+) \int_0^x \frac{\beta_1(s)}{\gamma(s, U_1^+, U_2^+)} \cdot$$

$$\exp\left\{-\int_s^x \frac{\mu(r, U_1^+, U_2^+) + \gamma'(r, U_1^+, U_2^+)}{\gamma(r, U_1^+, U_2^+)} dr\right\} ds d\sigma dx < 1$$

则问题 (5) 有解。

**证明** 根据引理 3 和定理 1 中的计算和分析以及谱的扰动理论 (见文 [7] 中的推论 VI. 1. 11), 由条件 (H5) 可得,  $s(\mathbf{A}_{(U_1^-, U_2^-)}) > 0$ , 由条件 (H6) 可得,  $s(\mathbf{A}_{(U_1^+, U_2^+)}) < 0$ . 于是可知, 存在  $(U_1, U_2) \in \mathbf{R}_+^2$ , 使得  $s(\mathbf{A}_{(U_1, U_2)}) = 0$ , 即  $\mathbf{A}_{(U_1, U_2)} U = 0$  (参见文 [9] 中的定理 6), 则问题 (5) 有解. 可参见文 [11] 中同样的方法。

**定理 4** 假设条件 (H1) - (H3) 以及以下的两个假设条件成立:

(H7) 存在  $(U_1^-, U_2^-) \in \mathbf{R}_+^2$ , 使得  $\beta_3(x, U_1^-, U_2^-)\beta_4(\sigma, y) \leq \beta(\sigma, x, y, U_1^-, U_2^-)$ ,  $\sigma \in [-\tau, 0]$ ,  $x, y \in [0, m]$ , 而且

$$\int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta_4(\sigma, x) \int_0^x \frac{\beta_3(s, U_1^-, U_2^-)}{\gamma(s, U_1^-, U_2^-)} \cdot$$

$$\exp\left\{-\int_s^x \frac{\mu(r, U_1^-, U_2^-) + \gamma'(r, U_1^-, U_2^-)}{\gamma(r, U_1^-, U_2^-)} dr\right\} ds d\sigma dx > 1$$

(H8) 存在  $(U_1^+, U_2^+) \in \mathbf{R}_+^2$ , 使得

$$\beta_3(x, U_1^+, U_2^+)\beta_4(\sigma, y) \geq \beta(\sigma, x, y, U_1^+, U_2^+),$$

$$\sigma \in [-\tau, 0], x, y \in [0, m]$$

而且

$$\int_0^m \int_{-\tau}^0 \beta_4(\sigma, x) \int_0^x \frac{\beta_3(s, U_1^+, U_2^+)}{\gamma(s, U_1^+, U_2^+)} \cdot$$

$$\exp\left\{-\int_s^x \frac{\mu(r, U_1^+, U_2^+) + \gamma'(r, U_1^+, U_2^+)}{\gamma(r, U_1^+, U_2^+)} dr\right\} ds d\sigma dx < 1$$

则问题 (5) 有解。

**证明** 同定理 3 (略)。

根据  $\beta$  的分离情况还可以提出类似定理 3 和定理 4 的充分条件, 这里不一一累述。

### 参考文献:

- [1] PIAZZERA S, TONETTO L. Asynchronous exponential growth for an age dependent population equation with delayed birth process [J]. J Evol Equ, 2005, 5(1): 61 - 77.
- [2] BAI M, XU S. On a size-structured population model with infinite states-at-birth and distributed delay in birth process [J]. Applicable Analysis, 2013, 92(9): 1916 - 1927.
- [3] 柏萌, 冯兆永, 徐士河, 等. 带分布时滞的具有尺度结构的种群模型的平衡指数增长 [J], 中山大学学报 (自然科学版), 2014, 53(1): 22 - 27.  
BAI M, FENG Z Y, XU S H, et al. Balanced exponential growth for a size-structured two-phase population model with delayed birth process [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(1): 22 - 27.
- [4] BAI M, XU S. Global existence of solutions for a nonlinear size-structured population model with distributed delay in the recruitment [J]. International Journal of Mathematics, 2015, 26(10): 1550085 - 1 - 20.
- [5] BÁTKEI A, PIAZZERA S. Semigroups and linear partial differential equations with delay [J]. J Math Anal Appl, 2012, 264(1): 1 - 20.
- [6] KATO N. Stationary solutions to a system of size-structured populations with nonlinear growth rate [J]. Journal of Biological Dynamics, 2012, 6 (Suppl 1): 42 - 53.
- [7] CALSINA À, FARKAS J Z. Positive steady states of evolution equations with finite dimensional nonlinearities [J], Mathematics, 2014, 46(2): 1406 - 1426.
- [8] FARKAS J Z, HINOW P. Steady states in hierarchical structured populations with distributed populations at birth [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B, 2013, 17(8): 2671 - 2689.
- [9] FARKAS J Z, GREEN D W, HINOW P. Semigroup analysis of structured parasite populations [J]. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2010, 5(3): 94 - 114.
- [10] ENGEL K J, NAGEL R. One-parameter semigroups for linear evolution equations [M]. New York: Springer, 2000.
- [11] BORGES R, CALSINA À, CUADRADO S. Equilibria of a cyclin structured cell population model [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B, 2009, 11(3): 613 - 627.